









## Articles



J. BORWEIN, Y. LUCET, AND B. MORDUKHOVICH,  
*Compactly epi-lipschitzian convex sets and functions in normed spaces*, Journal of Convex Analysis, 7 (2000), pp. 375–393.

## Références



J. M. BORWEIN AND H. M. STRÓJWAS, *Tangential approximations*, Nonlinear Anal., 9 (1985), pp. 1347–1366.



J. M. BORWEIN, *Epi-Lipschitz-like sets in Banach space : theorems and examples*, Nonlinear Anal., 11 (1987), pp. 1207–1217.



J. M. BORWEIN AND A. S. LEWIS, *Partially finite convex programming, part 1 : Quasi relative interiors and duality theory*, Math. Programming, 57 (1992), pp. 15–48.















## Problème d'optimisation à 2 niveaux

$$\min \quad f(x, z)$$

$$\text{contraintes} \quad \Psi(x, z) \leq 0, (x, z) \in C$$

$$z \in S(x) = \operatorname{argmin}\{g(x, z) | \psi(x, z) \leq 0\}$$

$(x, z)$  est solution  $\Leftrightarrow \exists u$  tel que  $(x, z, u)$  est solution de

$$\min \quad f(x, z)$$

$$\text{Sous} \quad \Psi(x, z) \leq 0, (x, z) \in C$$

$$\psi(x, z) \leq 0 \text{ and } u \geq 0, \langle \psi(x, z), u \rangle = 0,$$

$$\nabla_z g(x, z) + \nabla_z \psi(x, z)^T u = 0,$$

## Analyse de sensibilité

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, z, \alpha) \\ \text{contraintes} \quad & \Psi(x, z, \alpha) \leq 0, (x, z) \in C \\ & z \in S(x, \alpha) = \operatorname{argmin}\{g(x, z, \alpha) \mid \psi(x, z, \alpha) \leq 0\} \end{aligned}$$

$(x, z)$  est solution  $\Leftrightarrow \exists u$  tel que  $(x, z, u)$  est solution de

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, z, \alpha) \\ \text{sous} \quad & \Psi(x, z, \alpha) \leq 0, (x, z) \in C \\ & \psi(x, z, \alpha) \leq 0 \text{ and } u \geq 0, \langle \psi(x, z, \alpha), u \rangle = 0, \\ & \nabla_z g(x, z, \alpha) + \nabla_z \psi(x, z, \alpha)^\top u = 0, \end{aligned}$$



# Outline

## 1 Problèmes d'optimisation

- Ensembles Compactement Epi-Lipschitz
- Analyse de sensibilité sous contraintes d'inégalités variationnelles

## 2 L'opérateur de moyenne proximale

- Origine et propriétés
- Primitives convexe d'opérateurs finis
- Autres Propriétés de la moyenne proximale

## 3 Analyse convexe computationnelle

- Algorithmes rapides
- Fonctions Linéaires-quadratiques par morceaux
- Applications

## 4 Conclusion





## Outils d'analyse convexe

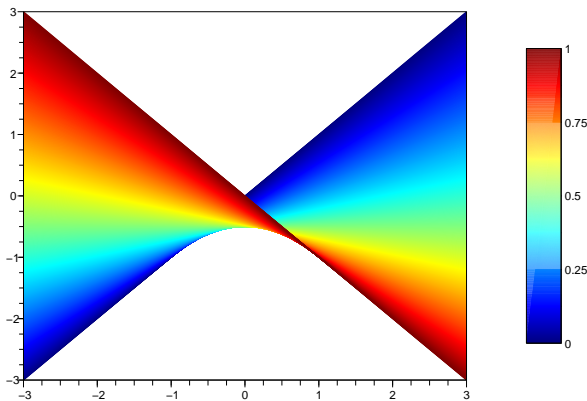
- *Conjuguée convexe*  $f^*(x^*) = \sup_x [\langle x, x^* \rangle - f(x)]$
- *Sous-différentiel*  
 $\partial f(x) = \{x^* \mid f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) (\forall y)\}$
- *Opérateur proximal*  
 $\text{Prox}(f) = (\partial f + \text{Id})^{-1} = \text{Argmin}_x f(x) + \|s - x\|^2$
- $\partial f$  maximal monotone  $\Rightarrow$   $\text{Prox}(f)$  est une fonction partout définie et Lipschitz de constante 1 [Minty]
- L'ensemble des opérateurs proximaux est convexe [Moreau 1965]

$$\begin{array}{ccccc}
 f_0 & & \mathcal{P}(f_0, \lambda, f_1) & & f_1 \\
 \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 \text{Prox } f_0 & \longrightarrow & \lambda_0 \text{Prox } f_0 + \lambda_1 \text{Prox } f_1 & \longleftarrow & \text{Prox } f_1
 \end{array}$$

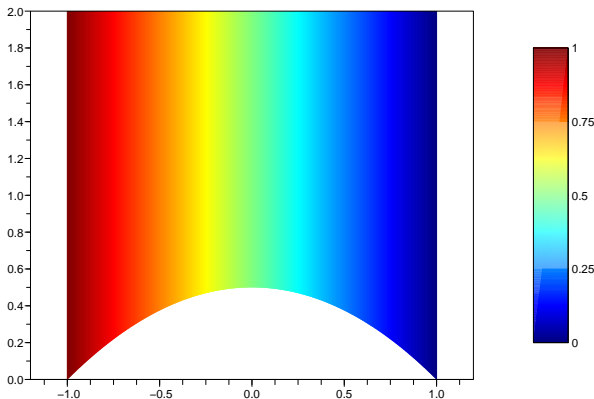








Moyenne proximale de  $f_0(x) = x$  avec  $f_1(x) = -x$



Moyenne proximale de  $f_0 = I_{\{1\}}$  avec  $f_1 = I_{\{-1\}}$







## Articles



H. H. BAUSCHKE, Y. LUCET, AND X. WANG, *Primal-dual symmetric intrinsic methods for finding antiderivatives of cyclically monotone operators*, *SIAM J. Control Optim.*, 46 (2007), pp. 2031–2051.

## Références

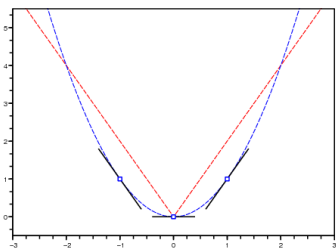
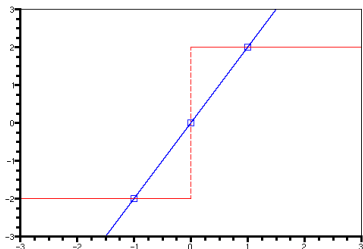


D. LAMBERT, J.-P. CROUZEIX, V. H. NGUYEN, AND J.-J. STRODIOT, *Finite convex integration*, *J. Convex Anal.*, 11 (2004), pp. 131–146.





- Si  $f$  est une solution, alors  $f + K$  est aussi une solution
- Même à une constant près, il n'y a pas unicité.  
 $f(x) = x^2$ , and  $f(x) = 2|x|$ .



## Monotonie cyclique

$n \in \{2, 3, \dots\}$ .  $A$  est  $n$ -cycliquement monotone si

$$\left. \begin{array}{l} (a_1, a_1^*) \in \text{gra } A, \\ \vdots \\ (a_n, a_n^*) \in \text{gra } A \\ a_{n+1} := a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \langle a_{i+1} - a_i, a_i^* \rangle \leq 0$$

La 2-monotonie se simplifie en

$$(\forall (x, x^*) \in \text{gra } A) (\forall (y, y^*) \in \text{gra } A) \quad \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0,$$

i.e., en la monotonie classique.

$A$  est **cycliquement monotone** si  $A$  est  $m$ -cycliquement monotone pour tout  $m \in \{2, 3, \dots\}$ .

## Définition de primitive

$f \in \Gamma$  est une **primitive** de  $A: \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$  si  $\text{gra } A \subseteq \text{gra } \partial f$   
quand  $A$  est fini :  $x_i^* \in \partial f(x_i)$

## Rockafellar

- Tout opérateur cycliquement monotone  $A$  admet une primitive
- Les opérateurs maximaux cycliquement monotones sont les sous-différentiels des fonctions convexes semi-continues inférieurement propres.
- Si  $A$  est maximal cycliquement monotone alors 2 primitives de  $A$  ne diffèrent que par une constante

Les *fonctions ancêtres communs* sont définies par

For  $(a_1, a_1^*) \in \text{gra } A$ ,  $C_{A,2,(a_1,a_1^*)}(x, x^*) = \langle x, a_1^* \rangle + \langle a_1, x^* \rangle - \langle a_1, a_1^* \rangle$ ,

et pour tout  $n \in \{3, 4, \dots\}$ ,

$C_{A,n,(a_1,a_1^*)}(x, x^*) =$

$$\sup_{\substack{(a_2, a_2^*) \in \text{gra } A, \\ \vdots \\ (a_{n-1}, a_{n-1}^*) \in \text{gra } A}} \left( \sum_{i=1}^{n-2} \langle a_{i+1} - a_i, a_i^* \rangle \right) + \langle x - a_{n-1}, a_{n-1}^* \rangle + \langle a_1, x^* \rangle.$$

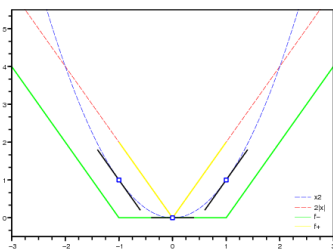
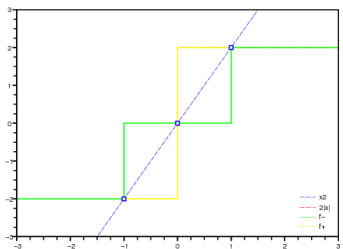
## Fonctions de Rockafellar

$$\forall (a, a^*) \in \text{gra } A \quad R_{A,(a,a^*)}(x) = \sup_{n \in \{2,3,\dots\}} C_{A,n,(a,a^*)}(x, 0).$$

## Propriétés

- $A$  cycliquement monotone,  $(a, a^*) \in \text{gra } A$ 
  - $R_{A,(a,a^*)}$  est convexe semi-continue inférieurement propre avec  $R_{A,(a,a^*)}(a) = 0$ .
  - $R_{A,(a,a^*)}$  est une **primitive** de  $A$  :  $\text{gra } A \subseteq \text{gra } \partial R_{A,(a,a^*)}$ .
  - $R_{A,a} = \min \{ f \in \Gamma(X) \mid f \text{ primitive de } A \text{ avec } f(a) \geq 0 \}$
  - $\forall f$  primitive de  $A$  :  $R_{A,a} \leq f \leq R_{A^{-1},a^*}^* - \langle a, a^* \rangle$

## Exemple



$$R_{A,a} \leq f \leq R_{A^{-1},a^*} - \langle a, a^* \rangle$$

## Fonctions de Fitzpatrick d'ordre $n$

$$F_{A,n} = \sup_{(a,a^*) \in \text{gra } A} C_{A,n,(a,a^*)}$$

## Fonction de Fitzpatrick de $A$ d'ordre infini

$$F_{A,\infty} = \sup_{n \in \{2,3,\dots\}} F_{A,n} = \sup_{(a,a^*) \in \text{gra } A} C_{A,\infty,(a,a^*)}$$

## Propriétés

- convexe semi-continue inférieurement
- $F_{A^{-1},n}(x^*, x) = F_{A,n}(x, x^*)$
- $A$   $n$ -cycliquement monotone  $\Leftrightarrow F_{A,n} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\text{gra } A$
- $A$  cycliquement monotone  $\Leftrightarrow F_{A,\infty} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\text{gra } A$





## Primitives intrinsèques

Soit  $A$  cycliquement monotone.  $f: X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une **primitive intrinsèque**, si  $\text{gra } A \subseteq \text{gra } \partial f$  et  $f$  dépend seulement de  $\text{gra } A$ .

## Exemples

$A$  cycliquement monotone de graphe fini.

- $R_{A,(a,a^*)}$  est une primitive non intrinsèque
- $f := F_{A,\infty}(\cdot, 0) = \max_{(a,a^*) \in \text{gra } A} R_{A,(a,a^*)}$  est intrinsèque
- $f := \sum_{(a,a^*) \in \text{gra } A} \frac{1}{n} R_{A,(a,a^*)}$  est intrinsèque
- Les deux sont polyédrales continues et définies partout

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des opérateurs cycliquement monotones sur  $\mathbb{R}^d$  ayant un graphe fini et non vide.

## Méthodes primitives symétriques primales-duales

$m: \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$  produit des primitives primales-duales symétriques  
 $A \mapsto m_A$

si  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $m_A$  est une primitive intrinsèque de  $A$  et  $m_{A^{-1}} = m_A^*$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{*} & A^{-1} \\
 m \downarrow & & m \downarrow \\
 m_A & \xrightarrow{*} & m_{A^{-1}}
 \end{array}$$

Les méthodes

$$A \mapsto F_{A,\infty}(\cdot, 0) = \sup_{(a,a^*) \in \text{gra } A} R_{A,(a,a^*)}$$

et

$$A \mapsto \sum_{(a,a^*) \in \text{gra } A} \frac{1}{n_A} R_{A,(a,a^*)},$$

ne produisent pas des primitives primales-duales symétriques.

## Symétrie

$$(\mathcal{P}(f_0, \lambda, f_1))^* = \mathcal{P}(f_0^*, \lambda, f_1^*)$$

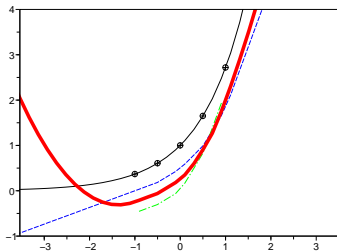
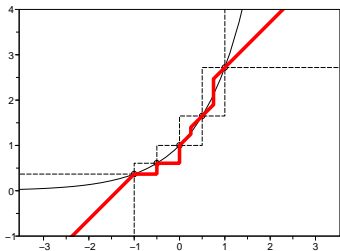
## Theorem (Symétrisation)

Soit  $m: \mathcal{A} \rightarrow \Gamma: A \mapsto m_A$  une méthode produisant des primitives intrinsèques. Définissons

$$\begin{aligned} m: \quad \mathcal{A} &\rightarrow \Gamma \\ A &\mapsto \mathcal{P}\left(m_A, \frac{1}{2}, m_{A^{-1}}^*\right). \end{aligned}$$

Alors  $m$  produit des primitives symétriques primales-duales.

## Primitives convexe d'opérateurs finis



## Articles



H. H. BAUSCHKE, R. GOEBEL, Y. LUCET, AND X. WANG, *The proximal average : Basic theory*, SIAM J. Optim., (2008).



## Extension

$$p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_1(f_1 + \mu^{-1}\mathbf{q})^* + \dots + \lambda_n(f_n + \mu^{-1}\mathbf{q})^*)^* - \mu^{-1}\mathbf{q}$$

## Propriétés

$f_i(x) = \frac{1}{2} \langle x, A_i x \rangle$  définies positives.

- $p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})$  a pour matrice  
 $(\lambda_1(A_1 + \mu^{-1}\text{Id})^{-1} + \dots + \lambda_n(A_n + \mu^{-1}\text{Id})^{-1})^{-1} - \mu^{-1}\text{Id}$   
 un translation par  $\mu^{-1}$  de la moyenne harmonique
- $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})(x) = (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)(x)$   
 moyenne arithmétique  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$
- $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})(x) = (\lambda_1 \star f_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \star f_n)(x)$   
 moyenne harmonique  $(\lambda_1 A_1^{-1} + \dots + \lambda_n A_n^{-1})^{-1}$ , i.e., la  
*somme parallèle* des matrices  $\lambda_1^{-1} A_1, \dots, \lambda_n^{-1} A_n$



## Bornes

$$(\lambda_1 f_1^* + \dots + \lambda_n f_n^*)^* \leq p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

$$\lambda_1 \inf f_1 + \dots + \lambda_n \inf f_n \leq \inf p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \inf(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)$$

## Enveloppe de Moreau

- $e_\mu p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 e_\mu f_1 + \dots + \lambda_n e_\mu f_n$
- $\text{Argmin } p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \text{Argmin } (\lambda_1 e_\mu f_1 + \dots + \lambda_n e_\mu f_n)$
- $p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = -e_\mu(-(\lambda_1 e_\mu f_1 + \dots + \lambda_n e_\mu f_n))$

## Limites

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})(x) = (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)(x)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})(x) = (\lambda_1 \star f_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \star f_n)(x)$$

$$e - \lim_{\mu \rightarrow +\infty} p_\mu(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \text{cl}(\lambda_1 \star f_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \star f_n)$$



## Articles



Y. LUCET, *Fast Moreau envelope computation I : Numerical algorithms*, Numer. Algorithms, 43 (2006), pp. 235–249.



J.-B. HIRIART-URRUTY AND Y. LUCET, *Parametric computation of the Legendre–Fenchel conjugate*, J. Convex Anal., 14 (2007), pp. 657–666.

## Références



Y. LUCET, *A fast computational algorithm for the Legendre–Fenchel transform*, Comput. Optim. Appl., 6 (1996), pp. 27–57.



———, *Faster than the Fast Legendre Transform, the Linear-time Legendre Transform*, Numer. Algorithms, 16 (1997), pp. 171–185.

## Transformée de l'analyse convexe

$$M_\lambda f(x) = f \oplus \frac{\|\cdot\|^2}{2\lambda} = \inf_y f(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2\lambda}$$

$$f^*(s) = \sup_x \langle s, x \rangle - f(x)$$

$$M_\lambda(s) = \frac{\|s\|^2}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\|\cdot\|^2}{2} + \lambda f(\cdot) \right)^* (s)$$

## Problème

Comment visualiser l'addition, la multiplication par un réel, et la conjuguée i.e. comment évaluer ces transformées sur une grille de points ?

## Algorithmes rapides

- Linear-time Legendre Transform LLT
- Parabolic Envelope PE
- **NonExpansive Prox NEP**

## Algorithme paramétrique

- **Parametric Legendre Transform PLT**

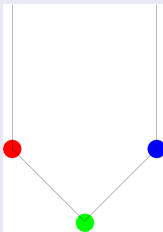
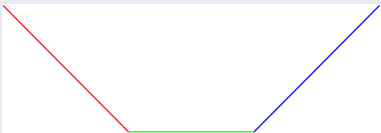
## Propriétés

- ✓ Complexité linéaire
- ✗ Demande de connaître le domaine dual
- ✗ Approximation numériquement requise même pour des fonctions simples.
- ✗ Difficilement applicable pour la moyenne proximale

## Parametric Legendre Transform PLT

Supposons  $f$  convexe régulière

$$\begin{cases} s = f'(x), \\ f^*(s) = sx - f(x). \end{cases}$$





$n$	PE	LLT	NEP	PLT
9,000	3.51	4.84	2.11	0.00
11,000	4.51	6.21	2.80	0.00
13,000	5.57	7.69	3.55	0.01
15,000	6.73	9.28	4.42	0.01
17,000	7.97	10.99	5.35	0.01
19,000	9.30	12.82	6.33	0.02
21,000	10.67	14.72	7.44	0.02
23,000	12.16	16.72	8.58	0.01
25,000	13.82	18.92	9.87	0.02
27,000	15.35	21.33	11.25	0.01
29,000	17.39	23.72	12.77	0.01

$f(x) = x^2/2$  sur l'intervale  $[-n/2, n/2]$ .

# Parametric Legendre Transform

## Avantages

- Complexité linéaire et très facile à implémenter
- Calcul automatique des  $s_j$ .
- Utilise l'information au premier ordre ( $f$  n'a pas besoin d'être différentiable).

## Inconvénients

- $f$  est supposée convexe
- Besoin de compléter par des parties affines y compris des "pentes à l'infini"

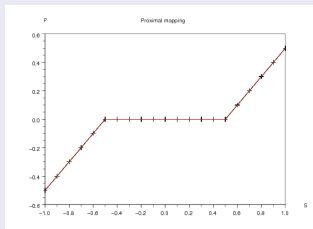
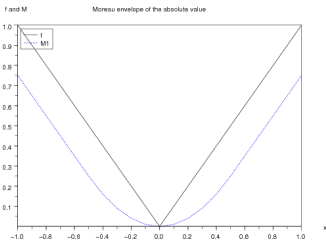


# Non-expansive prox Algorithm

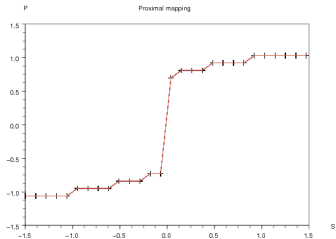
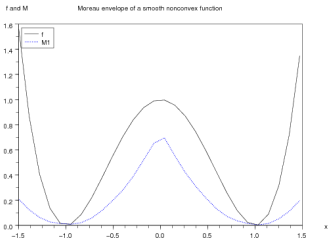
## Principe

$$\text{Prox}(s) = \text{Argmin}_x [\|\cdot\|^2 + f(x)]$$

$$0 \leq P(i+1) - P(i) \leq 1$$



## Algorithmes rapides



## Articles



Y. LUCET, H. H. BAUSCHKE, AND M. TRIENIS, *The piecewise linear-quadratic model for computational convex analysis*, *Comput. Optim. Appl.*, (2006).

Online.

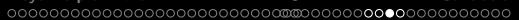
# Fonctions Linéaires-quadratiques par morceaux

## Définition

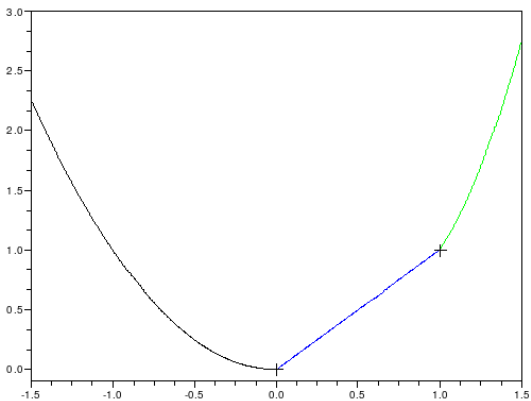
- Le domaine est l'intersection de fonctions affines
- Sur chaque morceau, la fonction est quadratique
- Restreint de plus aux fonctions convexes

## Propriétés

- Classe fermée sous les opérations convexes classiques :  
Addition, multiplication scalaire, conjugaison et régularisation
- Modélisation de domaines infinis
- Calcul symbolique à l'intérieur de la classe  $\Rightarrow$  Algorithmes hybrides symboliques-numériques
- Tous les algorithmes ont un temps de calcul linéaire.



# Fonctions Linéaires-quadratiques par morceaux



# PLQ vs. Algorithmes rapides

## PLQ

$$\mathcal{P}(f_0, \lambda, f_1) = (2\lambda - 1)x - 2\lambda(1 - \lambda)$$

## Algorithmes rapides

$$\begin{cases} \infty \\ (2\lambda - 1)x - 2\lambda(1 - \lambda) \\ \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}x^2 + \frac{\lambda + \lambda b - 1}{1 - \lambda}x - \frac{\lambda b(4\lambda + b - 4)}{2(1-\lambda)} \\ \frac{1-\lambda}{2\lambda}x^2 + \frac{\lambda - b + \lambda b}{\lambda}x + \frac{b(4\lambda^2 + b - \lambda b - 4\lambda)}{2\lambda} \end{cases}$$

$$\text{si } |x| > b,$$

$$\text{si } 2(1 - \lambda) - b \leq x \leq b - 2\lambda,$$

$$\text{si } -b \leq x \leq 2(1 - \lambda) - b,$$

$$\text{si } b - 2\lambda \leq x \leq b$$

## Articles



Y. LUCET, *What shape is your conjugate? A survey of computational convex analysis and its applications*, 2007



——, *A linear Euclidean distance transform algorithm based on the Linear-time Legendre Transform*, *Proceedings de CRV 2005*



——, *New sequential exact Euclidean distance transform algorithms based on convex analysis*, *Image and Vision Computing 2006*

## Références

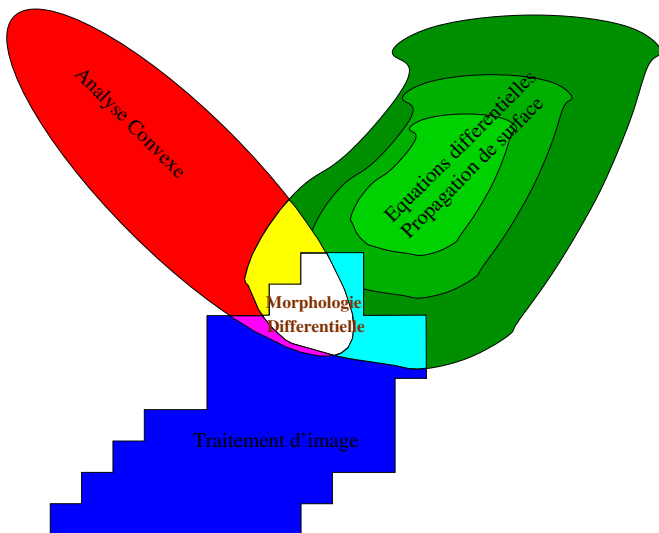


P. MARAGOS, *Differential morphology and image processing*, *IEEE Transactions on Image Processing*, 5 (1996), pp. 922–927.



——, *Differential morphology*, in *Nonlinear Image Processing*, Academic Press, 2001, ch. 10, pp. 289–329.

# Morphologie Différentielle





# Series-Parallel Linear Cost Network Flow

## Problème

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  with  $-\infty < l_{i,j} \leq x_{i,j} \leq u_{i,j} < +\infty$

$$\min \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{i,j} x_{i,j}$$

avec  $\forall i \in \mathcal{V} \quad \sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{E}\}} x_{j,i} = \sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{E}\}} x_{i,j}, \quad (\text{Conservation})$

$\forall (i,j) \in \mathcal{E} \quad l_{i,j} \leq x_{i,j} \leq u_{i,j}, \quad (\text{Capacité}).$

## Algorithmes

- Sommes et convolutions infimales imbriquées de fonctions affines par morceaux : Tri des noeuds / pentes
- Référence : P. TSENG AND Z.-Q. LUO, *On computing the nested sums and infimal convolutions of convex piecewise-linear functions*, J. Alg. 21 (1996), pp. 240–266.

# Transition de Phase

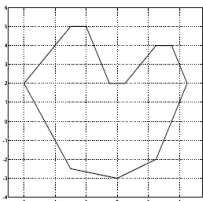
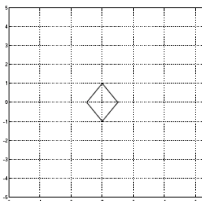
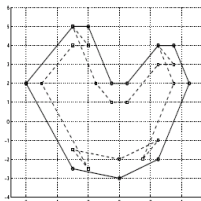
Quand deux fluides sont mélangés, l'entropie du mélange est la convolution supérieure de l'entropie des deux phases :

$$S(W) = \max_{W_1} S_1(W_1) + S_2(W - W_1)$$

- $S$  (resp.  $S_1$ ,  $S_2$ ) est l'entropie du mélange (resp. du premier fluide, du second fluide),
- $W = (M, V, E)$  est de le vecteur de masse, volume et énergie du mélange ( $W_1$ ,  $W_2$  correspond au premier et au second fluide respectivement).
- P. HELLUY AND N. SEGUIN, *Relaxation models of phase transition flows*, Math. Model. Numer. Anal., 40 (2006), pp. 331–352.

## Navigation de robot par transformée de Legendre

- Algorithme LLT étendue aux fonctions discrètes convexes, concaves et non convexes puis aux polygones : Le contact entre deux objets est détecté grâce aux pentes
- Use  $f \oplus g = (f^* + g^*)^*$

(a)  $P_E$ (b)  $P_B$ (c)  $P_E \oplus P_B$

# Transformée de distance

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

∞	∞	∞	∞	∞
∞	0	∞	0	∞
∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞

∞	∞	∞	∞	∞
∞	4	∞	10	∞
∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	12.5	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞

2	1	2	1	2
1	0	1	0	1
2	1	1	1	2
4	1	0	1	4
5	2	1	2	5

0	2	4	8	12
2	4	6	10	14
4	6	8.5	12	16
6.5	9.5	12.5	15.5	18.5
10.5	13.5	16.5	19.5	22.5

∞	∞	∞	∞	∞
2	0	-2	-6	-10
∞	∞	∞	∞	∞
9.5	6.5	3.5	0.5	-2.5
∞	∞	∞	∞	∞

$$M(s) = \|s\|^2 - 2 \sup_x \left[ \langle s, x \rangle - \frac{\|x\|^2 + f(x)}{2} \right]$$



# Efficient Belief Propagation for Early Vision

- ❶ Initialisation  $m_{p \rightarrow q}^0 = 0$ .
- ❷ À chaque itération  $t$  ( $t = 1$  à  $T$ ) calculer

$$m_{p \rightarrow q}^t(f_q) = \min_{f_p} \left( V(f_p - f_q) + D_p(f_p) + \sum_{s \in \mathcal{N}(p) \setminus q} m_{s \rightarrow p}^{t-1}(f_p) \right).$$

- ❸ Après  $T$  itérations, calculer le belief vector

$$b_q(f_q) = D_q(f_q) + \sum_{p \in \mathcal{N}(q)} m_{p \rightarrow q}^T(f_q).$$

- ❹ Finalement calculer  $f_q^* = \operatorname{Argmin}_{f_q} b_q(f_q)$

(2) est accéléré de  $O(nk^2 T)$  à  $O(nk)$  [ $n$ : nombre de pixels,  $k$  nombre d'étiquettes,  $T$  nombre d'itérations].

# Réseaux de communications

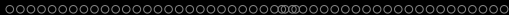
## Réseaux de communications simple

- $x(k)$  fonction d'entrée unique
- $y(k)$  fonction de sortie unique
- $y = h \oplus x$  où  $h$  est la réponse caractéristique (dépend du réseau et du protocole)
- Calculer  $h$  par  $h = y \ominus x$ .
- Étendre la transformée de Legendre par la transformée de pente pour calculer sur des données non convexes









## Poursuite des travaux

- Moyenne proximale : Manuscrit en cours sur d'autres propriétés (analyse de sensibilité, extension à des noyaux non quadratiques (distances de Bregman))
- $AC^2$  : Extension à des fonctions PLQ non convexes (M. Trienis MSc thesis), fonctions PLQ de deux variables et boîte à outils en deux dimensions. Applications plus spécifiques.
- Optimisation du traitement par rayon à intensité modulée (optimisation à grande échelle)

